

## **Escriure: aprenentatge**



### **Taula**

Representacions internes i externes .....	2
Sistemes simbòlics i signes .....	2
L'escriptura .....	3
L'escriptura matemàtica.....	5
Tipologia dels símbols matemàtics.....	6
Aprenem els signes .....	7
El "dibuix" dels nombres .....	9
L'ordre dels signes .....	11
Fins a on sabem els signes .....	12
La funció de registre.....	13
L'agrupament .....	16
Sumar abans que posicionar? .....	19
El sistema posicional i els seus problemes .....	21
El zero compta.....	24
Algunes propostes didàctiques.....	26
Una altra via: regularitats ordinals de la sèrie numèrica escrita.....	26
Les primeres passes mínimes: alguns exemples.....	29
Resum .....	33

## Representacions internes i externes

Una de les primeres característiques que la espècie humana va manifestar en el seu desenvolupament, i a diferència de la resta d'animals, va ser l'existència del que es podria anomenar *memòria voluntària*. Aquesta *memòria* ens va permetre la reconstrucció de fets i d'accions, possibilitant la millora d'aquestes i la capacitat d'actuació davant dels "fets", facilitant no només la nostra adaptació a l'entorn sinó la possibilitat d'intervenció i modificació d'aquest. En aquests processos de reconstrucció dels fets o dels processos es devien fer seleccions de detalls significatius que van ajudar a la construcció de les primeres imatges abstractes. La vida col·lectiva necessitava, a més, de formes d'organització noves i progressivament més complexes; va ser conseqüència lògica l'aparició de mètodes de comunicació també més elaborats. La parla va permetre, per primera vegada, la comunicació d'idees abstractes i va reforçar la memòria individual amb la memòria col·lectiva. El llenguatge oral va ser així, a més, un primer pas en un model de *representació externa* de les idees. No serà l'únic sistema de representació; tenim també el dibuix, el modelatge, el llenguatge gestual, el actes rituals, la música, la dansa, posteriorment l'escriptura... Quan les representacions externes es fan sobre suports perdurables podem parlar del naixement d'una *tecnologia de la memòria* (Moreno i Kaput a Alvarado 2005). L'elaboració d'aquestes formes de representació van ser, en el seu moment, cabdals per l'evolució humana, però el seu aprenentatge i ús encara ho són ara en la nostra evolució pròpia i personal del pensament.

Les representacions externes constitueixen, doncs, un domini propi del coneixement, diferenciat de les representacions internes pel seu caràcter públic, ostensiu; comprenen una gama variada de manifestacions, com les accions simbòliques, el llenguatge oral, l'escriptura, les notacions musicals, les notacions numèriques, les fotografies o els mapes.

E. Martí (a Alvarado 2005:54)

El pas de representacions internes a externes no és automàtic. Una sistema de representació externa (una figura modelada, un dibuix, un escrit, una construcció oral...) té uns codis i restriccions pròpies marcades per l'acord col·lectiu, per les limitacions del mitjà de representació triat o per la pròpia possibilitat que el suport dona per transferir les idees a representar del model intern a extern. Això obliga a transformar les representacions internes per adaptar-les al model extern escollit. Aquest procés de modificació és clau perquè les representacions internes no queden inalterades: també són subjectes a canvis i reestructuracions.

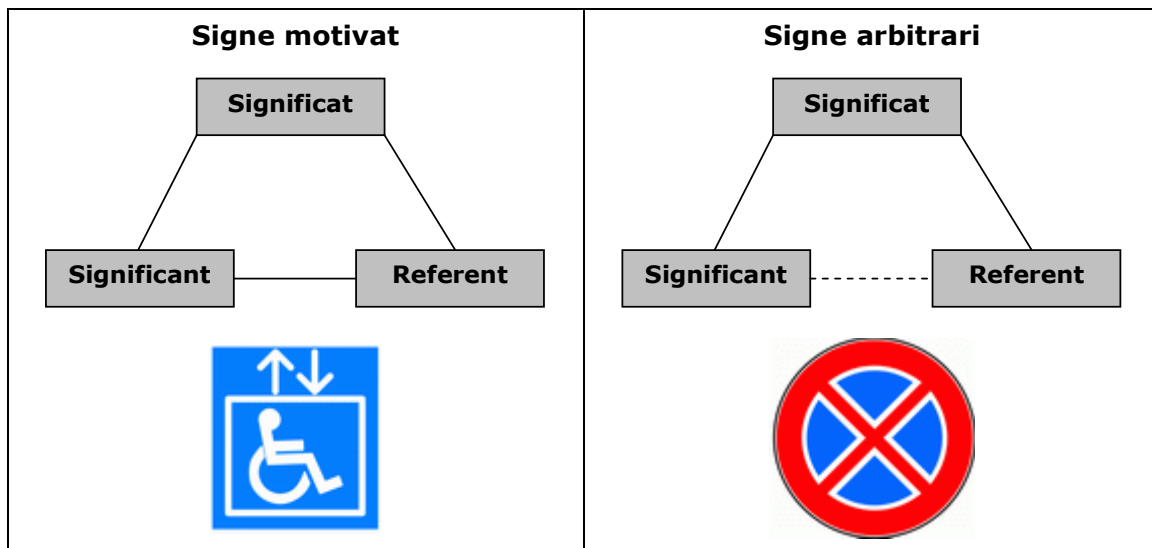
Des d'un punt de vista cognitiu, una característica crucial de les memòries externes és que permeten tractar aquests suports externs com a "miralls" del pensament i afavoreixen la reflexió sobre les nostres pròpies reflexions, obrint pas a la metacognició.

Moreno i Kaput (a Alvarado 2005:34)

## Sistemes simbòlics i signes

Vivim en un entorn cultural de gran riquesa simbòlica i aquests símbols es representen, la majoria de vegades, en diferents tipus de signes que hem d'interpretar contínuament. Però aquests signes, com a formes de representació de significats, es constituïran en punts de recolzament per l'elaboració de nous significats. Per tant l'accés al domini de sistemes simbòlics (entenent-los com a sistemes de representació) i dels signes que els suporten és un aspecte cabdal en el nostre procés d'enculturació.

Els signes, tal com se'ls entén en *semiòtica* (l'estudi dels signes i sistemes de signes), són senyals (acústiques, gràfiques...) que evoquen una idea. Tenen, per tant, una doble cara: la seva forma pròpia (*significant*) i el concepte que representen (*significat*). Els signes poden evocar la idea o objecte (*referent*) a representar d'una forma directa, relacionada amb la seva pròpia forma, amb alguna característica reconeixible o amb alguna relació causal; estaríem parlant, en aquest cas, d'*ícones* o *índexs*. Però, moltes vegades, la relació entre *significant* i *significat* és arbitrària, convinguda. Aquesta és una característica important de determinats sistemes simbòlics, com el de l'escriptura numèrica, perquè comporten la seva acceptació i afecten a la seva adquisició. El tipus de relacions existents entre *referents*, *significants* i *significats* s'acostuma a representar en forma de triangle amb una línia contínua o discontinua entre els dos primers, tenint en compte si la relació establerta entre *significant* i *referent* és directa o arbitrària.



Amb el temps els significants ../.. amb els seus significats es van convertint en instruments pel pensament y van configurant el nostre bagatge de recursos per raonar.

M. Alcalá (2002: 54)

Encara que els primers estudis semiòtics es van centrar en els signes verbals, actualment s'aplica a qualsevol sistema de signes d'una comunitat. Entre aquest sistema ens interessen ara especialment els de caràcter *notacional*. Entre ells trobem els *semasiogràfics*, com els dos senyals mostrats al quadre anterior i que no són necessàriament traduïbles a la llengua oral i els *glotogràfics*, que sí que ho són. Aquests són els que conformen els sistemes d'escriptura.

## L'escriptura

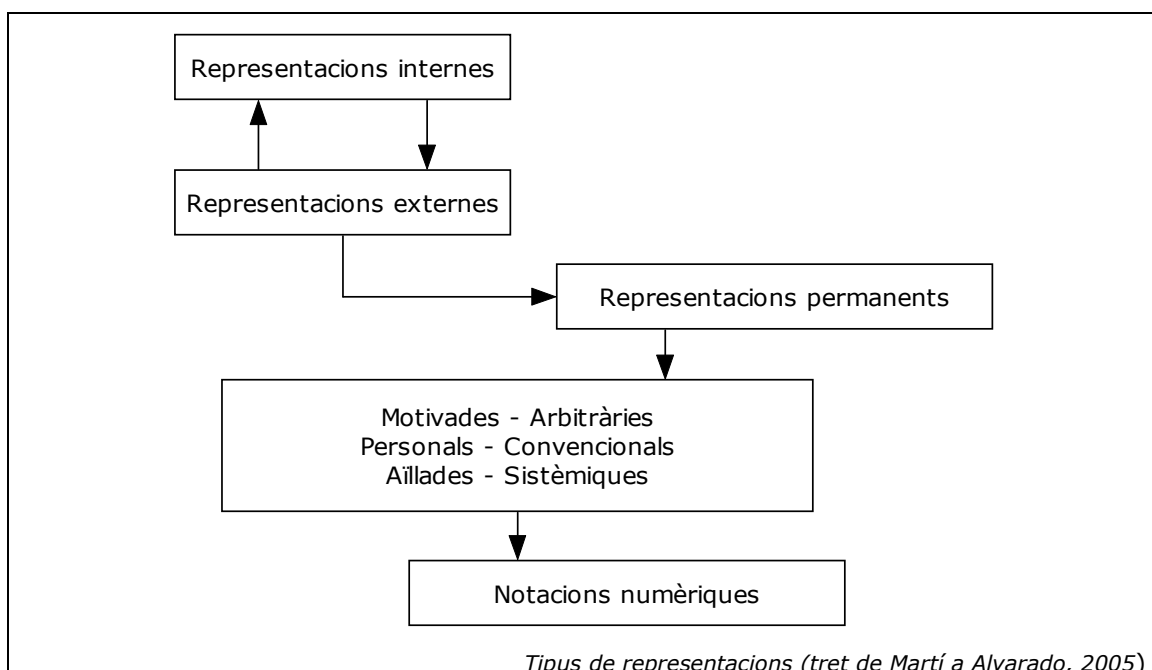
L'escriptura és un sistema de registre visible i permanent basat en un codi uniforme i preestablert (Crump, 1993). El fet de la visibilitat i la permanència són dues de les primeres característiques que separen la parla de l'escriptura. En principi, l'escriptura és un sistema de transcripció dels sistemes orals, encara que les seves pròpies característiques no el converteixen en un sistema de transferència automàtic (sinó intentem transcriure una conversa, tal qual s'ha fet, a paper).

Les escriptures conegudes fins ara són bàsicament *ideogràfiques* (o *logogràfiques*), com la xinesa, o *fonètiques* (també anomenades *fonogràfiques*). Entre les *fonètiques* trobem les jeroglífiques, les sil·làbiques i les alfabètiques, en la que cada signe representa un so aïllat. A les escriptures *fonètiques* un signe (una lletra), per sí

mateix, no és res, està mancat de significat. El que forma una unitat amb significat és el conjunt de lletres que formen la paraula. A la llengua parlada passa una cosa semblant: el que discriminem amb significat és el flux de sons que formen el mot. Per tant, en aquest anàlisi, el que ens interessa són les unitats mínimes amb significat (*morfemes*); ens centrarem més en les "paraules" que no pas en les "lletres". Cal observar que les escriptures fonètiques (de la mateixa forma que els sistemes semasiogràfics) van més enllà de les pròpies llengües, ja que amb el mateix grup de símbols pràcticament podem transcriure tots els idiomes. Pronúncia i ortografia són dues característiques molt més directament relacionades amb els idiomes i que fan aparèixer determinats símbols que fora del context de l'idioma de referència perden o canvien el significat. Per exemple, el grup de lletres *au* tindrà una traducció fonètica diferent entre un català o un francès; per altra banda lletres com la *ç* o la *ñ* tindran tan poca traducció fonètica per algunes llengües com la tenen per nosaltres à, ß, æ, ë, Ø, ê, etc.

Aquí trobem una de les claus d'un sistema escrit comú a qualsevol tipus de codi que vulgui ser utilitzat amb intencions comunicatives: el signe ha de ser, en primera instància consensuat, ja sigui per representar un so, una paraula o una idea. Però, en segona instància, ha de ser acceptat i, en certa manera, conservat. De fet si no es donen aquestes característiques d'acord sobre el sistema simbòlic costa parlar pròpiament de *codi*. Això implica que l'aprenentatge té un component important d'assimilació d'aquests codis, d'apropiació dels significants i significats dels signes, de les formes en que aquests es combinen tan per interpretar-los (lectura) com per utilitzar-los (escriptura). La conseqüència directa és que qualsevol sistema d'escriptura ha de ser transmès, no pot ser totalment reinventat. Un dibuix és un sistema gràfic que no és restrictiu, però les formes escrites exigeixen adaptar-se a unes regles de composició i interpretació preexistents i convingudes, a més d'acceptar les funcions socials per les quals han estat creades. (Alvarado i Brizuela, 2005).

Reprement la idea de concebre l'escriptura (i aquí inclourem l'escriptura matemàtica) com a una de les formes de representació externa, la podem caracteritzar com un model **arbitrari**, en quant formalment està lluny dels objectes o idees representades, **convencional**, ja que està subjecte a l'acord i ha de ser adoptat per la comunitat, i **sistèmic**, ja que disposa de tot un seguit de regles de diferents tipus que afecten al seu ús.

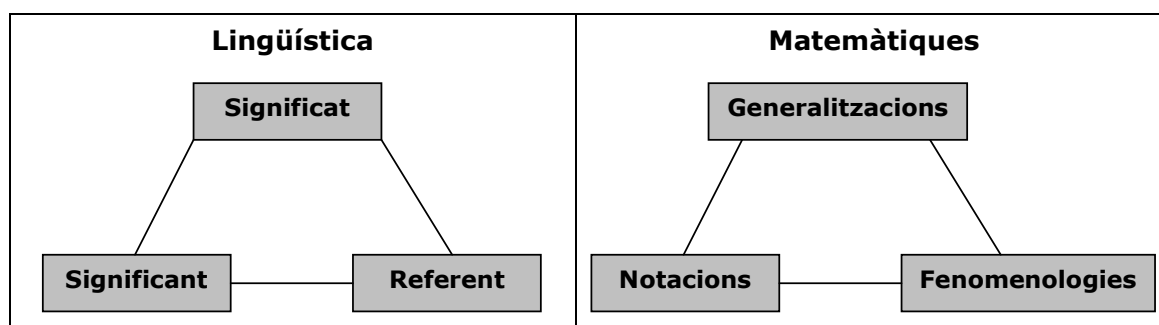


Les funcions que aconsegueixen els símbols escrits, tal com es recullen en aquest quadre extret de Pimm (1999), podem ser de diferents tipus (exclusius o combinats):

Ús	Comentari
Comunicació	Els símbols donen accés als pensaments dels altres.
Arxiu i recuperació del que es coneix	Casos especials de comunicació
Ajuda per a mostrar l'estructura	Les relacions entre els símbols reflecteixen les relacions entre les idees.
Facilitat per automatitzar la manipulació rutinària	Alliberen l'atenció conscient per dedicar-la a altres tasques.
Fer possible la reflexió	Situen els pensament "fora", amb certa estabilitat, en forma compacta i amb permanència, com a objectes que es poden estudiar.

## L'escriptura matemàtica

El model semiòtic de la lingüística general no sembla adir-se del tot amb la matemàtica. Autors com Godino i Recio<sup>1</sup> proposen una interessant adaptació del triangle clàssic semiòtic:



D'una forma breu podríem dir que les *generalitzacions* es referirien als conceptes i idees matemàtiques, les *notacions* als formes de representació gràfica (lletres, nombres, diagrames, gràfics...) i les *fenomenologies* a les situacions o problemes que porten a l'activitat matemàtica.

<sup>1</sup> Es pot veure a l'article GODINO, J i RECIO, A. (1997): *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática*:  
<http://www.sectormatematica.cl/educmatem/semiотico.htm>

La importància de l'escriptura és tan cabdal dintre de la pròpia matemàtica que pràcticament no la podem separar: la dependència de la pròpia ciència del seu sistema notacional és tan clara que, en molts casos, les millores en formes de representació han fet progressar les descobertes científiques. Intentar explicar una idea matemàtica a una altra persona sense el suport d'un paper, una pissarra, una pantalla... és, sinó impossible, molt complicat a nivell pràctic. Fins i tot es podria parlar de que, entre la població general, existeix una percepció de la matemàtica com inseparable de l'escriptura<sup>2</sup>. Aquesta ja seria una altra diferència clara amb l'escriptura de la llengua, però encara hi ha més. Algunes són específiques a la comparació amb el nostre sistema concret d'escriptura i d'altres a les representacions gràfiques de la llengua en general. Vegem-ne algunes.

L'escriptura matemàtica, i especialment la numèrica, s'acosta més als logogrames que a fonogrames ja que no representen sons sinó paraules o idees. El símbol 5 és diferent de la representació escrita *cinc*. Simbolitza directament una quantitat i no només "una paraula que representa una quantitat". Aquest mateix símbol mostra una altra característica de l'escriptura matemàtica: és més curta i concisa<sup>3</sup>. Aquesta concisió permet, a la vegada, la manipulació dels propis símbols. La conseqüència d'aquesta possibilitat de manipulació és que es desdibuixa la frontera entre símbol i objecte. Per altra banda, i en part degut a la seva concisió, la forma en que es combinen els símbols matemàtics<sup>4</sup>, la sintaxi de l'escriptura matemàtica, és molt més estricta i restrictiva que la de la llengua escrita normal. El procés d'aprenentatge de l'escriptura matemàtica és, per tant, parcialment independent del de la lecto-escriptura de la llengua.

Si anem una mica més enllà de l'escriptura dels nombres i observem només la de les operacions combinades veurem altres diferències que faran entrar en conflicte la lecto-escriptura matemàtica i la de la llengua:

Exemple d'operació combinada	Diferències associades
$5 \cdot \frac{3}{4} - 8 \cdot \left( \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{1}{7} - \frac{4}{5} : \frac{3}{5} \right)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>la direcció esquerra dreta de la lecto-escriptura de la llengua no es correspon amb l'estructura niada i l'ordre imposat per la prioritat d'operacions</li> <li>l'absència de context dificulta la comprensió</li> </ul>

## Tipologia dels símbols matemàtics

Alcalá (2002) diferencia, en quant a la simbolització matemàtica, diferents graus d'ordre:

- Símbols de 1r ordre – les paraules
- Símbols de 2n ordre – les notacions
- Símbols de 3r ordre – símbols sobre les notacions

<sup>2</sup> Una il·lustració d'aquest fet ens la dona un recull de dibuixos fet per D. Barba i Lluís Segarra en el que es demanava a nens i nenes de Primària una representació de la classe de matemàtiques: la majoria d'alumnes dibuixaven al mestre/a escrivint a la pissarra.

<sup>3</sup> Moltes de les idees que es recullen en aquest paràgraf estan recollides de Pimm (1999)

<sup>4</sup> No parlarem de *signes* per evitar confusions amb el sentit més habitual que li donem a aquest mot en matemàtiques (signe d'operació)

El símbols de 1r ordre els hem tractat abastament al capítol sobre comptar i els de 3r ordre corresponen a un camp fora d'aquest estudi, com és el de l'àlgebra. Ens toca parlar ara de les característiques de la simbologia de 2n ordre emprada en el camp de la numeració escrita i, com a mínim parcialment, de l'escriptura de les operacions.

El tipus de símbols emprats en matemàtiques<sup>5</sup>, com hem dit abans, són bàsicament *logogrames* ja que representen directament paraules completes. Els primers logogrames que aprenem són les xifres, que poden adoptar formes lleugerament diferents si comparem les impreses i les manuscrites. A més disposem de tot un conjunt de signes (ja aplicant aquesta paraula en un estricte sentit matemàtic) per indicar operacions o relacions.

També es fan servir alguns pictogrames i símbols alfabètics, tant de l'alfabet llatí com del grec i, fins i tot, de l'hebreu. L'ús de cada alfabet acostuma a estar restringit a diferents camps matemàtics i hi ha unes certes "normes d'estil" de l'ús de les lletres (les minúscules llatines serveixen per representar variables, incògnites o línies, les majúscules indiquen punts del pla, les lletres gregues es fan servir per diferenciar angles, l'alef hebreu s'utilitza en els nombres transfinitos...). Per acabar també s'usen determinats signes de puntuació amb funcions diferents de les que tenen a l'escriptura de la llengua.

Xifres	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9		0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	
Signes	+, -, x, ·, /, =, ≠, π, √, ≈, ∑, ∇, ∃, ∩, ∪, ∈, ∉, ⇒, ∫, etc			
Lletres	a, b, c...	A, B, C...	α, β, χ...	א, ב, ש, ...
Símbols de puntuació	, . ( ) { } : ! ` * ...			

Aquest catàleg de símbols no és un conjunt desordenat, sinó que els hem de combinar seguint unes pautes acordades que ajuden a millorar la concisió i exactitud que demanem a l'escriptura matemàtica. Aquestes pautes, força estrictes, són un dels esculls a superar en l'aprenentatge d'aquesta. Entre aquestes pautes s'han de tenir en compte algunes consideracions pel seu caràcter modificador:

- l'ordre: 45 és diferent de 54
- la posició (absoluta o relativa):  $m^n$  o  $m_n$ ,  $\frac{5}{4}$  o  $\frac{4}{5}$  ...
- la mida: 5640 €
- l'orientació:  $\subset$  o  $\supset$ ,  $<$  o  $>$ , 6 o 9...
- la repetició:  $f'$  o  $f''$ ...

## Aprenem els signes




Entre els diferents tipus de signes hem vist que existeixen els que, en la seva forma, recorden a allò que representen i que hem classificat com a *motivats*. També hem vist els *arbitraris*. Alcalá (2002) encara recull altres accepcions que són força

<sup>5</sup> També, a partir d'aquí, seguim les idees exposades per Pimm (1999)

clares: *analògics* i *convencionals*. En el camp de la representació de l'ordre i les quantitats els primers sistemes que van aparèixer, i ho hem vist amb amplitud, van ser analògics: els dits, les pedres, les osques... Aquestes, fins i tot, es van mantenir en moltes numeracions escrites per representar les unitats o quantitats molt petites.

Representacions del 3 a diferents numeracions		
egípcia-grega acrofònica-romana-xinesa de varetes	assíria	maia
	𐤁𐤁𐤁	● ● ●

Per Alcalá també les representacions dels nombres fetes amb materials com els reglets, els blocs multibase... són formes de representació analògica

Representacions del 3		
Reglets de Cuissenaire	Blocs multibase	Àbac xinès
		

Quin model de representació és més fàcil d'assimilar? No cal dir que els analògics. Però també s'ha de manifestar que aquests tenen unes limitacions que es fan progressivament més evidents a mesura que les quantitats a representar van augmentant. És aquí quan neix el principi d'agrupament i on les notacions arbitràries van agafant força. Aquests signes de desena no recorden visualment la quantitat representada.

Representacions del 10 a diferents numeracions				
egípcia	grega	romana	assíria	maia
∩	Δ	X	𐤁	=

En el moment que apareixen signes nous i deslligats en l'aparença de la quantitat que representen, és quan aquests s'han de convenir, acordar, per afavorir possibilitats comunicatives més enllà de l'ús personal.

Veiem així que el procés d'aprenentatge es pot vincular amb aquest procés històric, passant de les notacions analògiques a les arbitràries i de les personals a les convingudes. En aquest procés hi apareixen un parell d'aspectes que ens mereixeran una atenció especial i seran objecte de tractament diferenciat: l'agrupament i la funció comunicativa. Però hi ha altres dels que podem parlar ara.

Per exemple podem referir-nos al distanciament forma-significat. El salt semiòtic que manifesta la possibilitat de representar un objecte amb una marca, fent correspondències biunívokes, és gran, però el que es fa al representar grups de quantitats amb gràfics absolutament aliens als conjunts de referència és enorme. De la mateixa forma que ho va ser pels primers humans, també ho ha de ser per la canalla. La diferència fonamental és que l'entorn simbòlic dels nostres nens i nenes és infinitament més ric i que l'ús de signes convencionals és estès i usual.



S'han fet múltiples experiències sobre l'ús dels signes convencionals numèrics. Martí (a Alvarado, 2005) refereix una feta per Bialystok i Codd a l'any 1996 amb nens i nenes entre 3 i 5 anys. Es demanava a la mainada que anotessin quants objectes hi havia a tres caixes, amb menys de deu objectes cadascuna. Després feien altres activitats i 20 minuts més tard havien de recuperar la informació. Tots els infants sabien comptar fins a 10 i reconeixien notacions numèriques convencionals també fins a 10. Els resultats van mostrar que els nens i nenes més petites van fer notacions més diverses (iteratives, figuratives i convencionals), mentre que entre els de 4 i 5 anys la proporció de notacions convencionals era més gran, tot i que encara es mantenien les no convencionals. No en tenim dades numèriques de les proporcions de cada model però, en tot cas, es veu que, encara que es coneguin les notacions convencionals, per una part dels infants les formes iteratives i figurades són més clares. De la segona part, la referida a la interpretació correcta de les anotacions fetes, sí que tenim dades:

- més del 90% de les notacions convencionals van ser interpretades amb èxit.
- poc més del 60% de les analògiques (iteratives).
- al voltant del 20% de les globals (figurades).

L'eficiència de les notacions convencionals és clara, però, ¿és aquesta la característica que li demanen els nens i nenes? ¿Hi ha altres funcions que esperen d'una forma de representació? ¿No hi ha informacions que es "perden" al destacar exclusivament la quantitat? Per E. Martí les notacions convencionals han de superar tres obstacles per ser enteses:

- El seu caràcter arbitrari
- Que representen només una propietat: la quantitat
- Que no mostren informació explícita sobre la numerositat (el símbol del 6 no visualitza que representa una quantitat més gran que la del símbol del 2)

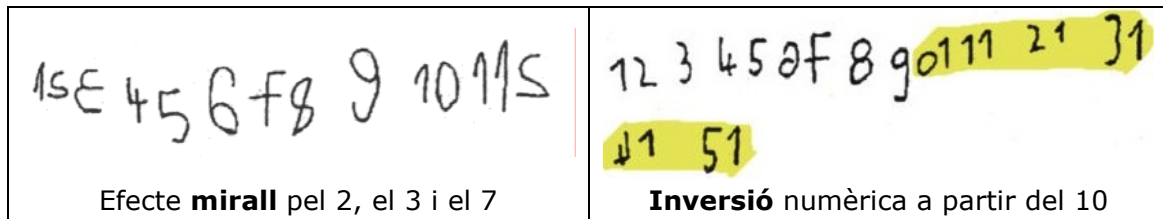
Altres experiències fetes a França a finals dels 80 del passat segle (Saada, 2003) entre nens i nenes de 3 i 6 ½ anys mostren tres tipus de notacions entre la canalla per representar col·leccions entre 3 i 5 elements:

- a) representacions globals (amb petits dibuixos) que expressen "molts" sense ajustar-se a quantitats (entre 3 i 4 anys)
- b) notacions logogràfiques establint correspondències biunívokes (entre 3 ½ i 5 anys)
- c) notacions amb xifres de dos tipus:
  - només amb la xifra (per exemple, 4)
  - amb la sèrie completa (1 2 3 4)

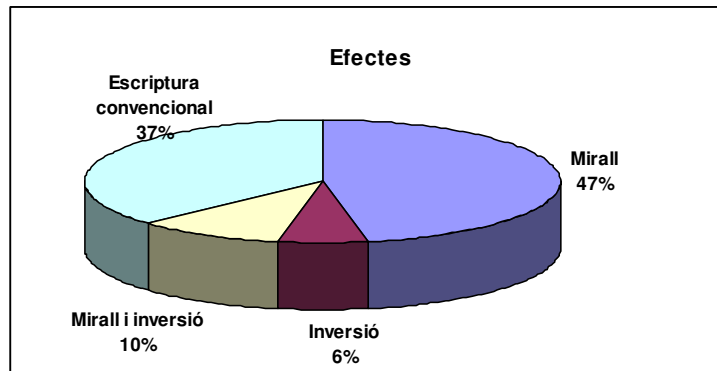
Aquest darrer tipus d'anotació és interessant perquè la reflexió sobre les possibles motivacions de la seva aparició porta a pensar en diferents causants: representar la numerositat, establir una mena de correspondència biunívoca (objecte-signe) o fer una paral·lelisme entre la forma d'aprendre la sèrie numeral oral i la seva forma corresponent escrita, feta també de forma seriada i establint correspondències biunívokes entre les representacions oral i gràfica.

## El "dibuix" dels nombres

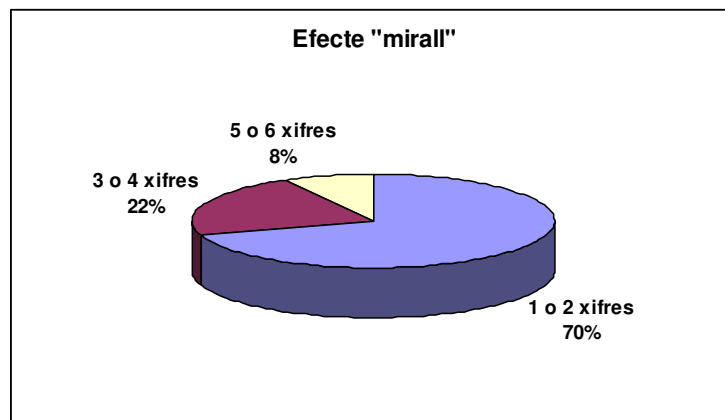
Aprendre l'escriptura numèrica implica aprendre les grafies. No entrarem en massa detalls sobre aquest tema (no afecta especialment a l'alumnat de CS de Primària ni al d'ESO) però sí paga la pena comentar alguns dels problemes més habituals: l'**efecte "mirall"** i les **inversions** entre unitats i desenes.



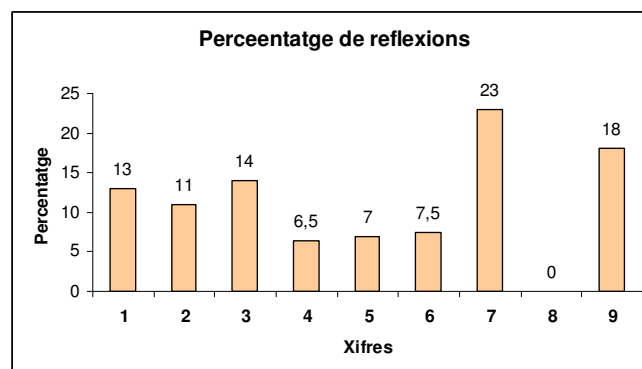
Un estudi fet a França entre 776 alumnes de 1r de Primària (Saada, 2003) certifiquen el que moltes vegades hem vist en les primeres produccions escrites pel nostre propi alumnat.



En quant a la quantitat de xifres afectades per l'efecte "mirall" es recullen també aquestes dades:



Entre les xifres més "girades" trobem el 7 i el 9 i, degut a la seva simetria, el 8 no en presenta cap cas.



Algunes de les reflexions de xifres semblen degudes a interferències amb algunes lletres de l'alfabet que s'aprenen per la mateixa època. Per exemple entre el 2 i la S (i/o amb el 5), el 3 amb la E i el 7 manuscrit amb la F.

La inestabilitat provocada per la manca de seguretat en aquesta fase és manifesta en un dels casos recollits on s'observen xifres que de vegades es giren i de vegades no (com l'1 correcte del 13 al 16, o els dos tresos que apareixen) o la inversió del 10 que no es produeix a partir del 12.

Handwritten numbers and letters: 12 4 5 6 18 20 1 M 12 13 14 15 16  
M 18 1 P

## L'ordre dels signes

Quan s'aprenen els signes numerals gràfics, sembla que, inicialment, es fa establint una mena de correspondència biunívoca amb la sèrie acústica de comptatge. Al mateix estudi esmentat anteriorment amb alumnat de 1r de Primària fet a França (Saada, 2003) es mostraven unes targetes amb nombres i espais de separació entre ells. Es demanava als nens i les nenes que diguessin els nombres que faltaven.



El 65% va contestar correctament. Un 13% van col·locar només un dels nombres que falten entre el 8 i l'11. Al text de referència s'explica com molts dels i les alumnes es recolzaven en el comptatge oral, amb diferents estratègies, per contestar la pregunta (ajudant-se amb els dits, començant sempre des d'u, comptant "a partir de"...)<sup>6</sup>. Curiosament, quan es donaven un grup de targetes desordenades similars a les de la taula amb els nombres de l'u a l'onze, el percentatge d'èxit, sense deixar-se cap nombre, pujava del 65 al 77%. També en aquesta tasca es van observar accions de comptatge.

A C. Barba (2005) també s'estudia la identificació de nombres amb targetes desordenades del zero al 20.

3	6	10	2	9	8	5	0
7	4	23	15	12	43	16	20



No es donen dades estadístiques<sup>7</sup> però es troben exemples dels tipus d'identificació proposant una taula de pautes d'observació per observar el treball de l'alumnat:

- nombres que s'identifiquen correctament menors que 10
- nombres que s'identifiquen correctament més grans que 10

<sup>6</sup> Al mateix estudi es recull que un 27% de l'alumnat sabien comptar oralment fins a 20 i un 67% més enllà de 20.

<sup>7</sup> La investigació de Carme Barba, orientada al disseny de materials i activitats, té unes característiques més qualitatives, en quant a observar les tipologies d'estratègies que utilitzen els nens i les nenes, que quantitatives, per mesurar en quin grau apareixen.

- nombres que no identifiquen i s'és conscient de que no se saben
- nombres mal identificats
- recursos que s'utilitzen per identificar nombres que no se saben

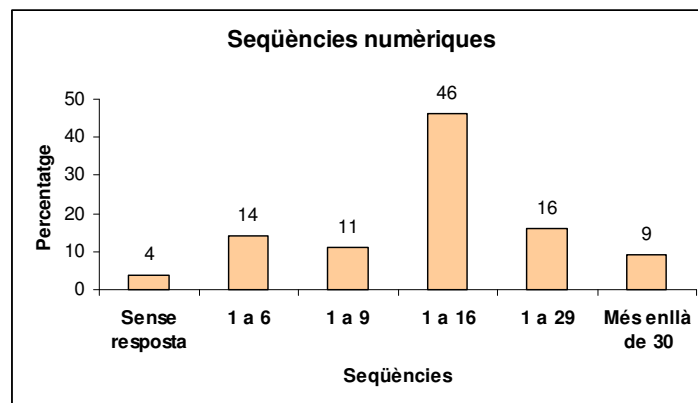
Atenent la darrera d'aquestes pautes es comenta el cas d'una nena que desenvolupa una curiosa estratègia per intentar identificar el 15. Aquest cas és especialment interessant perquè presenta un conflicte entre el comptatge oral, per un costat, i la recerca de regularitats amb el sistema posicional, per altre.

Laia : No identifica el 15 i busca un recurs. Comença a comptar des de 1 fins que arriba a un nombre que acaba en 5 (el primer que troba és el 25 ja que el 15 no inclou la paraula 5) i és la resposta que dona. Quan després se li mostra el 12 i l'identifica correctament. Quan veu el 43 diu 13 i no dubta en cap moment de la seva resposta.

C. Barba (2005: 13)

## Fins a on sabem els signes

A l'estudi francès (Saada 2003) fet amb prop de 800 alumnes de 1r de Primària també es va investigar fins a on sabien escriure nombres. Els resultats van ser els següents:




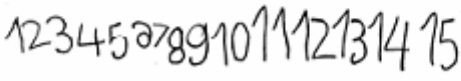
Sembla que el salt més important a salvar són els canvis de desenes. Hi ha un fet concret, no relatiu al cas de les desenes, curios d'observar: que la majoria de nens i nenes abandoni l'escriptura en el 16 (el "darrer" nombre irregular oralment) i no en el 19, que seria el final de la desena. Aquesta observació reforçaria la idea de que els primers nombres escrits s'aprenen de forma compactada, fent una mena de transposició oral-grafia sense estructura constructiva del sistema de numeració que s'anirà agafant posteriorment amb l'observació de regularitats (tal com feia la Laia a l'exemple de l'apartat anterior).

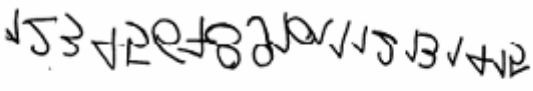
A l'estudi es va observar també un desajustament entre el comptatge acústic i l'escrit ja que només un 25% escriu els nombres més enllà de 20 mentre que al voltant d'un 65% saben fer-ho oralment.

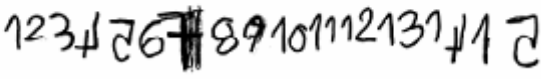
Els resultats d'aquesta investigació coincideixen força amb altres fetes anteriorment, també a França, a l'any 1978 per Cl. Meljac.

Percentatges de mainada que sap llegir i escriure nombres fins a...								
Edat	Cap	5	10	15	20	50	100	i més
4	100							
4;6	Algunes grafies aïllades							
5								
5;6	50	50	30	20				
6 (maternal)	8	92	92	32	8			
6 (CP)		100	80	50	10			
6;6		100	100	80	80	60	10	10
7		100	100	90	73	63	63	27

Requel 

André 

João 

Marisa 

*Exemples d'algunes de les escriptures recollides del grup 1 a 16 (Saada 2003)*

## La funció de registre

Entre les funcions que hem assignat als sistemes simbòlics de representació escrita hem vist la del "registre i arxiu". Històricament aquesta va ser, justament, la primera, anterior, fins i tot, al registre de la llengua oral.

Ja s'ha esmentat anteriorment que, en contrast amb la parla, que el registre escrit és permanent (no depèn de la memòria) i estable (no subjecte a les modificacions). Té altres característiques: és visible, revisable, accessible, permet salvar salts en l'espai i en el temps... També s'ha dit abans que la permanència i la revisió permeten, a més, la reflexió. El registre numèric pren una importància capital en el càlcul, però les operacions aritmètiques no són el centre d'aquest estudi.

¿Fins a quin punt l'escriptura numèrica és percebuda pel nostre alumnat dels primers anys educatius com una forma de registre? Una experiència feta per Mònica Alvarado (2005) intenta observar en quines condicions es comencen a utilitzar els numerals gràfics, les diferents formes en que s'usen abans d'arribar al seu ús convencional i el tipus de decisions que es prenen per representar conjunts diferents. Es van fer entrevistes amb 20 nens i nenes, d'una edat mitjana 4,8 anys, i es va demanar als infants que fessin una llista dels objectes que es guardarien a una caixa. Per fer la llista es donava un full relativament petit (una quartilla) per tal de forçar sistemes de representació que ocupessin poc espai. Els elements a guardar a la caixa es

presentaven per l'entrevistadora amb verbalitzacions concretes. Així, per exemple, es deia "un grapat de clips" quan es presentaven 10 clips de diferents colors, "cinc retoladors", "un, dos, tres... sis fitxes" (hi havia un altre conjunt de 12 de diferent color)... També es presentaven dos llapis idèntics en diferents moments i per separat. A més, al començament, se'ls hi demanava l'edat (que, en dos casos es va escriure 4 en forma seriada 1 2 3 4).

Els resultats globals de les formes d'escriptura van ser:

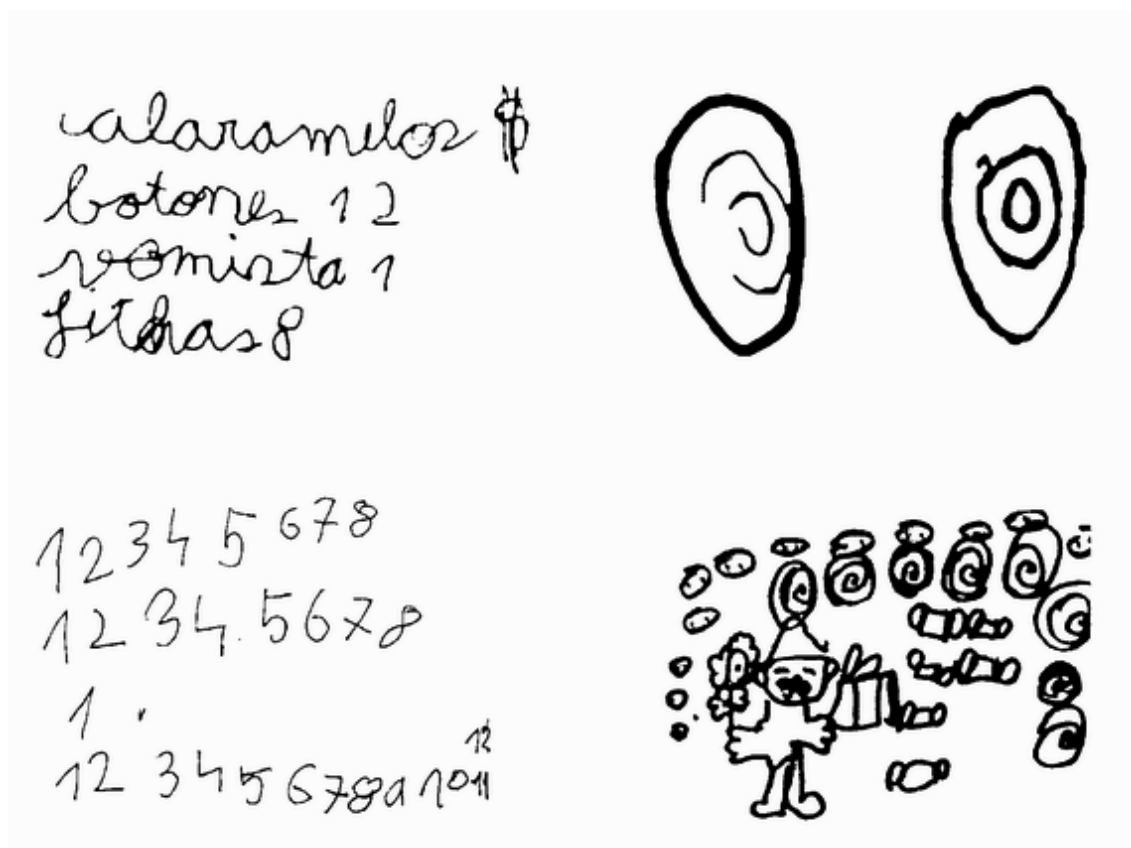
Ítem	Només lletres	Lletres i nombres
Un llapis gran	20	-
Clips de colors	20	-
Dues gomes	20	-
Cinc retoladors	20	-
Sis fitxes vermelles	6	14
Dotze fitxes grogues	3	17

La primera observació és que només es va utilitzar la notació numèrica quan s'havia comptat explícitament. Les formes de representació amb "lletres" recollides van ser molt diferents i estan força desglossades i estudiades en el treball de referència. En tot cas es va observar que el que era dual (llapis i gomes) es va escriure amb lletra i, en molts casos, iterativament (per exemple: una goma, una altra goma), fins i tot ometent l'article (goma, altra goma). Hi ha experiències anteriors que han fet veure que les notacions formals s'adopten a més facilitat quan les quantitats a representar són relativament grans (a partir de 15) (Alvarado, 2005). En tot cas sembla que el comptatge específic pot haver mediatitzat l'experiència ja que hi ha grups en els que s'ha destacat la quantitat (fitxes) i grups en els que no (clips).

L'escriptura numèrica és, doncs, un acte intencional, però que s'utilitza només en determinats contextos com a eina de comunicació o memòria. Si el registre té una intenció de reforç de la memòria personal es podrà considerar com una mena de comunicació interna. La comunicació interna no cal que adopti formes tan convencionals i per això és lògic que els registres escrits personals adoptin característiques i estructures més informals. Potser aquesta és una de les raons afegides a la resistència a l'adopció de sistemes convencionals.

Martí (a Alvarado, 2005) comenta una altra experiència feta a l'any 2000 per García-Milà, Teberosky i ell mateix en la que es donaven tres caixes, una buida, sobre la que parlarem posteriorment quan abordem els problemes del zero, i dues de plenes. S'havia d'anotar els continguts de les capses de forma que, un cop barrejades, es pogués saber què contenia cadascuna. Van participar tres grups d'edats (5, 6 i 7 anys) cadascun amb 20 nens i nenes. Pràcticament la totalitat del grup de 5 anys i un 38% del de 6 no va aconseguir recordar el contingut interpretant les pròpies anotacions. El 68% del de 7 sí que ho va aconseguir. Sobre el tipus d'anotació, convencional o no, cap nen/a de 5 anys va fer servir notacions convencionals i sí que ho feren el 26% del grup de 6 anys i el 58% del de 7. Les estratègies de notació per representar la numerositat van passar, com hem comentat en experiències anteriors, per la iterativitat, l'ús dels plurals, els numerals gràfics i l'acompanyament o

no dels noms dels objectes. Només dos nens del grup de 5 anys i la meitat dels de 7 anys ho van fer combinant número i nom.



*Quatre exemples de notacions per representar 8 caramels, 8 fitxes blanques, 12 botons i un nino (el Pitufo bromista). (Tret d'Alvarado 2005)*

Un dels aspectes que es destaca en aquesta experiència és que el registre que es demana ha de recollir dues característiques: la quantitat d'objectes i la identificació d'aquests. És una situació molt semblant als primers registres numèrics sumeris dels que disposem. En el cas dels nens i nenes la representació de la quantitat presenta dificultats i, en tot cas, es prioritza la identificació.

De la mateixa forma que va passar a la història de les notacions numèriques, la producció de notacions arbitràries i diferenciades per a representar la identitat dels objectes (mitjançant signes amb funció d'identificació) i la quantitat (mitjançant signes arbitraris i compilats) sembla un avanç laboriós i cognitivament complex.

E. Martí (a Alvarado 2005: 76)

Observant les experiències comentades fins ara podem trobar un patró dels aspectes a considerar per fer decantar la notació, en el cas que hi hagi un cert coneixement del sistema convencional (qüestió, per cert, no baladí), cap a les formes establertes arbitràries:

- **Destinatari.** Si el destinatari és un mateix la notació pot adoptar formes no convencionals més clares, en principi, d'interpretar.<sup>8</sup>
- **Grandària del conjunt a representar.** Les quantitats grans són més difícils de representar amb formes no convencionals.

<sup>8</sup> Aquest aspecte s'hauria d'estudiar amb més profunditat ja que a les descripcions dels experiments fets sembla que poques vegades el destinatari de la informació és un altre individu.

- **Precisió en la resposta.** Només si és molt clar que es demana la conservació de la quantitat en la notació aquesta es considera rellevant.

Queda pendent d'estudi una altra qüestió relacionada indirectament amb el registre numèric: la funció identificativa. En el capítol sobre el comptatge es va plantejar la qüestió de la funció dels nombres i, entre aquestes, es va observar que la d'identificar (un autobús, la porta d'una casa, una data, un telèfon...) és una de les primeres amb les que els nostres nens i nenes es troben, fins i tot per nomenar el curs en el que hi són (P-3, P-4...). Aquesta qüestió afecta també als numerals gràfics. No hem trobat gaires estudis que es plantegin fins a quin punt existeix una discriminació d'aquestes formes numerals d'altres prèvies a l'entrada a l'escola o al seu treball específic a l'aula, com les alfabètiques, els pictogrames, els logotips.... Tampoc n'hem trobat que investiguin quin ús coneixen o en farien d'aquesta *pseudofunció* registral.<sup>9</sup> Una de les poques recerques fetes que tracta alguns d'aquest aspectes (recollida a Martí – Alvarado 2005) demanava fer una mena de "carta d'identificació" a una trentena de nens i nenes de 4 i 5 anys (aproximadament la meitat de cada). En aquesta carta es demanaven dades escrites "amb lletra" i numèriques: nom, edat, data de naixement, telèfon, germans, color del cabell... Per representar l'edat només la meitat dels infants de 4 anys van fer servir nombres i l'altra meitat va fer servir lletres o dibuixos; al grup de 5 anys la majoria va utilitzar nombres. Curiosament aquesta proporció, en aquest mateix grup, va baixar també a la meitat quan s'havia d'escriure l'edat dels germans o el seu nombre. En funcions identificatives, no quantitatives, com l'adreça o el telèfon, la majoria van fer servir lletres. Només 2 nens/es de 4 anys, entre 15, i 7 de 5 anys, entre 16, van utilitzar nombres. Aquestes observacions ens fan pensar que s'hauria d'afegir un altre factor als tres apuntats abans que faci decantar al nostre alumnat cap la notació numèrica comuna:

- **Ús del nombre.** S'adoptarà abans quan el nombre compleix funcions molt clares de representació quantitativa.

## L'agrupament

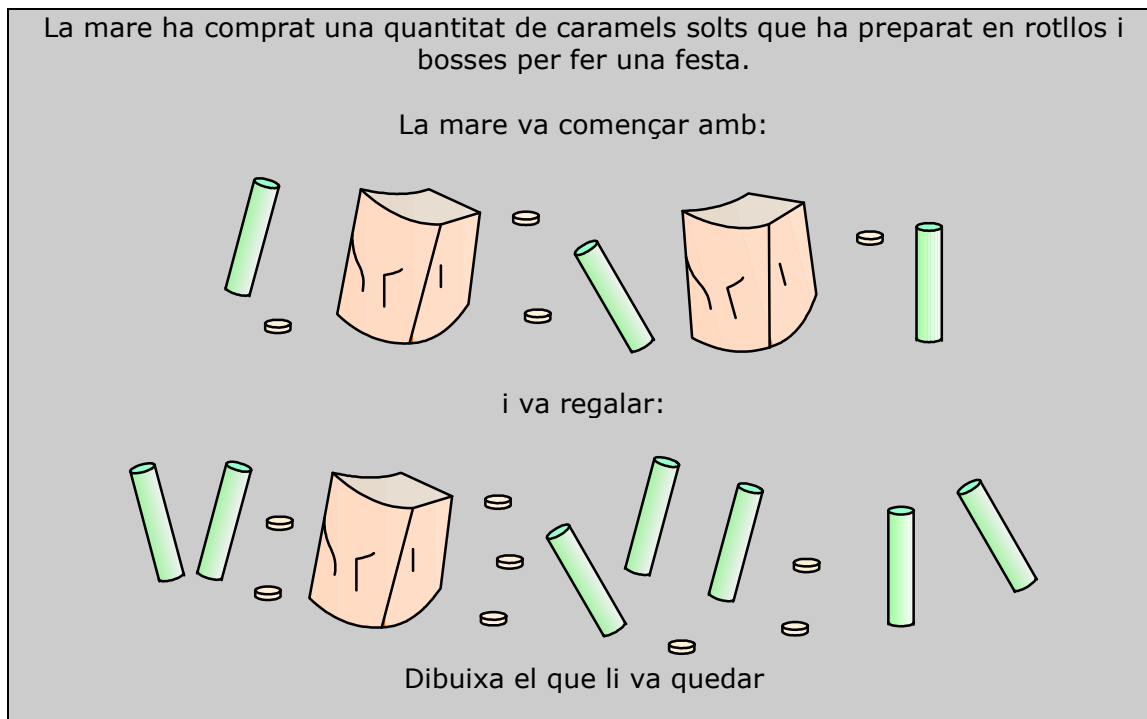
Històricament les notacions iteratives van ser les primeres en aparèixer. Si la marca que representa l'objecte de comptatge és arbitrària, allunyada de la seva imatge real, tenim un primer salt representacional. Hem vist que pels nens i nenes, en certa manera, aquest procés també es segueix. L'estat maduratiu d'un infant es pot comparar però no equiparar al d'un grup humà en procés de desenvolupament tecnològic. A més la nostra canalla creix en una cultura plenament marcada pels sistemes simbòlics i notacionals; pensem, sinó, en el reconeixement de logotips que fan els nens i nenes ja molt abans d'entrar a l'escoles. També hem vist, estudiant el procés històric de l'evolució dels sistemes de numeració, que el següent estadi és l'agrupament de marques i, relacionat amb aquest, l'aparició de signes nous per representar aquests grups. Deixant de banda l'arbitrarietat formal forçosa d'aquests nous signes centrem-nos en la idea de l'agrupament. ¿És tan clarament necessari pel nostre alumnat en les seves primeres passes en el camp dels nombres? ¿Quin grau de comprensió tenen al respecte? El problema de l'agrupament és la clau de volta de tots els sistemes de numeració. Aquest agrupament, a més, ha de reunir les condicions de *successivitat* (grups que reuneixen grups, que agrupen grups...) i

<sup>9</sup> Diem *pseudofunció* perquè els nombres no s'utilitzen per representar una quantitat o un ordre explícit i evident, sinó que són formes de transcripció de numerals amb funció gairebé substantiva. Per exemple al barri del Poblenou de Barcelona hi havia un autobús que era indistintament anomenat pel seu número, 92, o pel seu nom popular, "la Catalana"; en aquest cas 92 té un ús estrictament nominal.



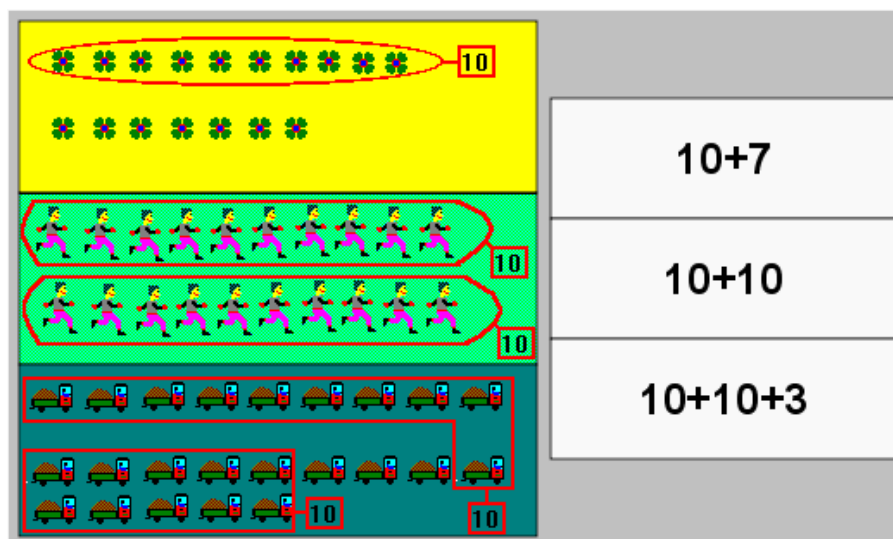
*regularitat* (els grups reuneixen quantitats determinades i constants d'unitats i de grups).

Un estudi fet al voltant dels anys 80 per Bednarz i Janvier (Dickson, 1991) sobre 75 alumnes, d'edats compreses entre 8 i 9 anys, intentava investigar aquesta qüestió. Per fer-ho es va plantejar el següent problema amb materials concrets i manipulables:



Només el 40% es van adonar que calia saber la quantitat de caramels de cada rotllo i el de rotllos de cada bossa. D'aquests, un grup van associar un número inventant-se els valors i un altre va demanar-lo a l'entrevistador. Del 60% restant o bé van considerar el problema irresoluble o van restar, de cada categoria (caramel, rotllo, bossa) el nombre més petit del més gran.

No sembla haver-hi gaires experiències més indagant sobre aquest tema. Sí que es plantegen moltes activitats en les que es forcen les activitats de reunir i empaquetar però sembla que poques vegades es creen situacions en les que es vegi la necessitat o no de fer-ho i es treballin els avantatges i/o inconvenients. És cert que els nen i nenes petites no tenen gaire sentit de "l'economia en la feina" i un recompte de quantitats grans es pot representar perfectament amb una llarga sèrie de marques idèntiques (no és el que hem vist que fem també les persones adultes amb un recompte de vots, per exemple?). El domini de l'agrupament tindrà el seu reflex en el de la seva acció contrària: la descomposició. Sembla que totes dues qüestions es treballen més amb objectius de càlcul que no purament de representació numèrica.



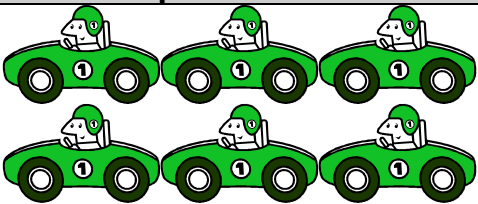
*Exemple d'activitat feta amb Clic*

En exercicis com l'anterior el fet d'agrupar és una imposició escolar. Això, en principi no té gaire importància, ja que part del fet educatiu consisteix en forçar l'aparició de determinades situacions-problema per tal d'abordar les seves possibles solucions. Però, en tot cas, aquesta mena d'activitats tenen poc de vivencial o implicatiu. No treballen les raons de fons de l'agrupament sinó que s'adrecen directament als aspectes convinguts del mateix. Un exercici com l'anterior pot tenir una correcta intencionalitat complementària, però no hauria de ser el centre de la qüestió de l'agrupament.

Comptatge oral (acústic i resultatiu), concepte de nombre (ordinal i cardinal) i notació escrita es treballen paral·lelament i es retroalimenten i reforcen (a la vegada que també s'interfereixen). En el comptatge oral hem vist que fins al disset, sinó més endavant, no comencem a entrar en una sistemàtica de la numeració. A partir de la vintena la sistemàtica és clara i poc a poc evident per la canalla que aprèn a generalitzar-la amb la bàsica incorporació dels mots claus nous (trenta, quaranta... cent...). El principi d'agrupament s'aplica ja d'una forma no explicitada. En el comptatge de quantitats relativament grans l'agrupament també ajuda a fer la tasca més còmoda. Si hem de comptar quantitats grans acostumem a subdividir el comptatge en petits grups (de 5 en 5, de 10 en 10); la suma ens ajudarà a reconstruir la quantitat total. En aquest cas sí que s'acostuma a treballar l'agrupament d'una forma més explícita i intencional.

L'agrupament, notacionalment, apareix en dues formes: compilant quantitats i estructurant el sistema numèric.

La existència de signes compilats no ha de representar una dificultat insalvable. Els numerals orals ja són signes compilats. El significat "quatre" no il·lumina que representa una quantitat més petita que "nou", que és una paraula més curta. Recordem, però, que l'aprenentatge acústic del comptatge es fa de forma dissociada de la seva significació cardinal: serà més tard, quan el mot està après i l'experimentació és rica, que s'associarà al seu significat cardinal. L'aprenentatge de l'escriptura numèrica, en canvi, es basa en el coneixement d'aquest comptatge acústic. El signe visual "6" s'associa al signe oral "sis" donant-li un lloc dintre d'una sèrie visual-acústica (1-2-3-4-5-6...; u-dos-tres-quatre-cinc-sis..). Tots dos signes són compilats, representen un grup de sis unitats que, no perdem de vista, queda millor representat per una notació iterativa sense agrupament.

Representacions no compilades		Signes compilats	
		IIIIII	6 sis

És molt probable que en les primeres passes de l'aprenentatge de la lecto-escriptura numèrica les representacions del 10, del 11, del 12... siguin també per l'alumnat una forma de signe compost (una mena de segon grau de compilació) de la mateixa forma que el seu nom és un únic signe compost de lletres o sons. En casos com aquests el comptatge oral, el *signe verbal*, no ajuda a veure la sistemàtica que comença a partir del 10. Tenim aquí una interferència entre l'oralitat i la transcripció escrita; no serà la única. Un cas que, probablement, visualitza aquestes interferències és aquest recollit a Saada (2003) en el que un nen escriu en línies separades de l'1 al 10, del 11 al 16 i del 17 al 19, com si fossin sistemàtiques d'escriptura diferents (recordem que en francès la irregularitat dels numerals orals també acaba parcialment, com al català, al setze).

12345678910  
11-12 13141516  
17 18 19

Hem vist que part de l'alumnat presenta una certa resistència inicial en l'ús d'aquests signes compilats quan han de fer servei a un reforç personal de la memòria.



El segon tipus d'agrupament és el que estructura la base de la numeració escrita. En el cas del problema que hem vist abans dels caramels i els successius agrupaments en rotllos o bosses, les unitats són, en certa manera, visibles; com a mínim eren manipulables. Quan escrivim els signes aquesta característica no es dona: el grup d'unitats s'esvaeix i és substituït per un símbol nou, diferenciable en aspecte (en el cas de les numeracions additives) o en ubicació (en el cas de les posicionals). Guanyem en espai i facilitem la lectura de la quantitat representada, tot i que aquesta quantitat total, tal com passava amb el comptatge per grups, haurà de ser "reconstruïda".

## Sumar abans que posicionar?

En el procés històric de conformació de les numeracions escrites, els sistemes additius han estat no només els més abundants, sinó els que més han resistit el pas del temps. Només quan els sistemes posicionals van mostrar els seus grans avantatges en el càlcul van ser substituïts, tot i reunir altres qualitats importants com la brevetat d'escriptura de nombres grans, la limitació de signes a utilitzar i la "i-limitació" en la grandària de les quantitats a representar. ¿No tindran els sistemes additius, doncs, algunes característiques més "naturals" que els posicionals? ¿Quines seran aquestes característiques?

- En primer lloc l'**aspecte visual** de l'acumulació iterativa de signes s'acosta més al model de correspondències amb marca arbitrària representativa d'unitats i, per tant, a la numerositat del cardinal a representar. Això no deixa de ser relativament fals en alguns casos com el dels dos nombres egipcis

que es mostren a la taula inferior. Cal *acceptar* i *reconèixer* primerament, doncs, l'existència de diferents signes quantificadors de grups de diferent grandària. Aquests, però, ens podran ajudar, com veurem al proper punt, a ponderar la grandària dels nombres.

103	57
	
Nombre més gran amb menys signes	Nombre més petit amb menys signes

- Els signes, els símbols, **no es reutilitzen**: el signe d'unitat és només d'unitat, el de desena de desena. Els grups de diferent grandària són representats directament per signes diferents, identificadors i individualitzadors del grup i de la seva mida. Aquests quantificadors representaran així unitats o grups d'unitats: desenes, centenars... Per visualitzar finalment la grandària dels nombres s'ha de dominar el sistema de signes: si es veuen signes representatius de nombres més grans, la quantitat representada també ho serà. Això tindria una equivalència en l'acostament que fan els nens i les nenes petits al sistema de comptatge oral quan reconeixen numerals com "trenta mil quatre-cents cinquanta vuit" com un nombre "enorme" sense saber el grau "d'enormitat". Es reconeix oralment un signe "gran" de la mateixa forma que es reconeixeria visualment.
- La **construcció** (escriptura) i **reconstrucció** (lectura) del nombre és relativament fàcil ja que es basa únicament en la suma, sense cap regla addicional més.

Els sistemes additius tenen unes limitacions de caràcter matemàtic prou comentades ja, però conceptualment són més fàcils d'aprendre. Hi ha un obstacle que no salven: la manca de correspondència amb el sistema oral que, com es va veure en el capítol sobre el comptatge, només trobem amb un alt nivell d'ajustament entre la llengua xinesa i la seva escriptura gràfica (no existeix tampoc tal correspondència entre els numerals de l'1 al 9, ja que cadascun té signe lingüístic o gràfic propi).

L'ús de diferents formes de representació numèrica proporciona diferents visions del problema de la transcripció escrita de quantitats i aborden aspectes parcials també diferents. Per tant l'estudi de les relacions entre diverses formes representacionals (personals, històriques...) ha de tenir una important repercussió en la formació dels conceptes implicats. (Brizuela, a Alvarado, 2005)

No hi ha relació directa entre el símbol i el significat en els numerals indo-aràbics (els habituals símbols del 0 al 9) usats encara a Occident. El vincle existent entre nombre i numeral en aquest sistema és convencional. No passa això amb els sistemes més primitius que utilitzaven un principi de repetició de símbols en el que no hi havia relació entre el lloc ocupat pel símbol i el valor. Així, per exemple, els numerals jeroglífics egipcis constituïen un sistema de numeració intermedi molt útil perquè els nens petits l'apreguessin abans d'arribar a captar la major abstracció del nostre sistema decimal en el que el valor està relacionat amb el lloc que ocupen les xifres.

D. Pimm (1999: 42)

Tot i així la inclusió de sistemes additius en les primeres passes en l'aprenentatge dels nombres només adquireix un sentit ple si el procés didàctic contempla el treball amb models notacionals propis, informals, elaborats per la mateixa mainada. Si

no és així més aviat podrien tenir un efecte distorsionador o de complexitat afegida a la inherent al sistema posicional decimal.

Una cosa que sabem, i a la que ens estem referint repetidament, és que l'alumnat no arriba a l'escola conceptualment en blanc sobre el món dels nombres.

Nens i nenes viuen des de molt petits en contacte amb números, instruments culturals com la calculadora, la cinta mètrica o la balança, amb sistemes d'unitats i persones que els usen, amb formes diferents de representació com els tiquets de compra o els plànols... Tots aquests elements formen part de pràctiques socials en les quals veuen participar els adults o en les que ells mateixos participen directament.

H. Forrellad i C. Gallego<sup>10</sup>

Els nombres escrits que ha conegut des de sempre, en el nostre entorn cultural, són els indoaràbics. Per tant els nens i les nenes, de la mateixa forma que amb la numeració oral, tindran uns preconceptes sobre aquesta. Per exemple, que les numeracions orals i escrita es correspondran d'una forma més directa de la que ho fan en realitat o que quantes més xifres té un nombre més gran serà aquest (Lerner i Sadosky, 1994). Per tant, tenim unes bases sobre les que treballar directament amb el nostre sistema sense haver-lo de transformar en un altre (tal com es feia en dècades anteriors intentant treballar inicialment amb bases diferents a deu). Conèixer aquests preconceptes, punts d'encaix, d'obstacle... ens podrà ajudar a preparar millors seqüenciacions didàctiques que ajudin a la construcció i reconstrucció personal de les regles del sistema posicional.

Això no implica que en edats superiors no sigui convenient veure sistemes additius (o amb bases diferents) que ajudin a formalitzar millor la comprensió completa del sistema posicional.

## El sistema posicional i els seus problemes

El sistema posicional de numeració és el tipus de codificació numèrica que s'ha acabat imposant pels seus grans avantatges matemàtics, tant en els que es refereixen als aspectes de representació com en els que afecten a la seva possibilitat de manipulació en el càlcul. Aquests avantatges manipulatius són un dels factors que, segurament, imposen la seva ràpida presentació en el currículum escolar. El sistema notacional i la possibilitat d'operar amb els símbols seran noves "cares" del polièdric concepte de nombre que el nen o la nena s'anirà formant a partir de les seves experiències, observacions i accions.

... la notació numèrica posa en joc processos constructius, ja que afavoreix abstraure, visualitzar i redescobrir regularitats, relacions i estructures conceptuals en el domini matemàtic.

Scheuer i Germano (a Alvarado, 2005: 110)

---

<sup>10</sup> FORRELLAD, HELENA i GALLEGGO, CARLOS (2005). *Biaix* nº 23. Pàgina 15

Però el sistema posicional té una sistemàtica complexa<sup>11</sup>. Ens podem fer una primera idea només observant un problema relacionat amb la doble direccionalitat que ens imposa la lectura de nombres grans: en el sistema posicional els nombres es llegeixen d'esquerra a dreta<sup>12</sup> i, quan són relativament petits, no tenim gaire problema; però quan la grandària del nom és relativament gran hem de fer una primera ponderació de lectura de dreta a esquerra per fer els agrupaments de tres en tres que ens permetin fer el pas dels numerals gràfics als orals, en els que hi trobem una mena de base complementària en la base mil organitzadora dels grups<sup>13</sup>, no present en l'estructura profunda de la construcció escrita. Les dificultats relacionades amb la lectura d'aquests nombres grans (lligat també a les de memoritzar-los) fa que moltes vegades els desglossem en grups a l'hora de dictar-los, com quan, per exemple, dictem el DNI o el telèfon<sup>14</sup>. Una segona idea sobre el grau de complexitat del sistema posicional és que entre els malalts d'*acalcúlia* (malaltia que ja havíem esmentat en el capítol de comptatge i que afecta a la capacitat d'ús dels nombres i del càlcul), les nocions associades al valor posicional eren de les primeres en quedar afectades per la malaltia<sup>15</sup>.

H. Ginsburg, al anys 70 del segle XX, diferencia tres fases en el desenvolupament de la comprensió del valor relatiu a la posició:

1. S'escriuen correctament els nombres sense saber ben bé per què.
2. Es comprèn que hi ha determinades formes d'escriptura que són errònies (per exemple 31 en comptes de 13)
3. Es comprèn el significat del valor relatiu, entenent, per exemple, que a 13 l'*u* representa 10.

Ginsburg va apuntar que no són molts els nens i nenes de primària que arriben a la 3a fase. Un dels motius es refereix, una vegada més, a les interferències de les formes de construcció dels numerals orals. Un dels exemples que presenta l'he pogut observar personalment amb alumnat de 12 anys d'origen socio-econòmic i cultural baix; un nombre com *tres mil vuit-cents trenta quatre* s'escribia així: 3000800304. Les regles de la numeració escrita posicional no presenten les irregularitats del comptatge oral (tan en l'ús de signes semàntics com en el de les operacions aritmètiques que es fan amb ells) però tenen unes estructures operacionals menys clares, més amagades, ja que les multiplicacions i sumes que fem amb ells per reconstruir la quantitat representada no són gens evidents.

Hi ha altres interferències en l'aprenentatge de la numeració posicional escrita. Lerner i Sadosky (1994) recullen casos d'una investigació feta a Argentina on s'observa que els nens i les nenes de 1r de primària aprenen bé el que les autores

<sup>11</sup> Per definir matemàticament un sistema posicional necessitem un conjunt tancat de símbols i un altre de regles per combinar-los. Una de les característiques fonamentals és la *base* que ens indica la quantitat d'unitats d'un nivell que ens calen per formar-ne altre d'un nivell superior. El total de símbols a utilitzar és idèntic al nombre indicat per la base. En un nombre en base  $n$ , el dígit  $d$  del lloc  $i$ , començant per la dreta, serà de la forma  $d \cdot n^{i-1}$ . El nombre quedarà escrit així  $d_m d_{m-1} \dots d_2 d_1$ . El seu valor serà

$$v = \sum_i^m d_i \cdot n^{i-1}$$

<sup>12</sup> En el cas de cultures com l'àrab aquí trobem un problema afegit ja que el sentit de lecto-escriptura de la llengua és dreta-esquerra i el dels nombres esquerra-dreta.

<sup>13</sup> Curiosament aquesta base complementària encara no ha agafat una forma uniformada per ser representada, així trobem que, de vegades separem els nombres de tres en tres deixant un espai, en altres ocasions posem punts, comes, subíndexs...

<sup>14</sup> No està de més recordar aquí aquell petit acudit matemàtic en que la frase "cinc per quatre vint i u, vint-i-dos" només pren sentit si el "quatre vint" l'entenem com a nombre decimal:  $5 \cdot 4,20 + 1 = 22$ .

<sup>15</sup> Algunes de les idees aquí presentades i les experiències que vindran a continuació estan extretes de Dickson (1991)

de l'estudi anomenen *nusos* de la numeració (100, 1000...) però tenen problemes en la construcció dels que estan als intervals entre *nusos*. Per exemple algun nen/a que escriu correctament el 100 escriu el 500 com a 105, el 300 com a 103, etc. Un cas com el *cinc mil* s'escriu algunes vegades de la següent manera: 51000. En aquest estudi també es recullen molts casos de escriptura com el del 3834 comentat abans.

Es pot observar, en part, el domini de les regles del sistema posicional mirant la capacitat d'ordenació que presenten els nens i nenes. En general podem pensar que l'alumnat elabora unes regles pròpies observant regularitats com que "quant es més xifres té el nombre més gran és" o bé que "la xifra més a l'esquerra és la que mana" (Lerner, a Alvarado 2005). Proves fetes a Anglaterra a la dècada dels 80 van mostrar que més del 90% de l'alumnat d'11 i de 15 anys ordenava correctament nombres de tres i quatre xifres. Altres proves fetes amb infants de 10 anys feia baixar el percentatge d'encerts fins al 65% quan els nombres eren més grans (de 5 a 7 xifres). Però la capacitat d'ordenar no és, ni de bon tros, l'únic indicador del domini del concepte de posició relativa.

També als anys 80 trobem noves experiències fetes per Berdnarz i Janvier amb nens i nenes entre 8 i 9 anys. Es mostrava dos casellers de tres cel·les, un de ple, formant el nombre 423 i un altre de buit.

4	2	3
---	---	---

--	--	--

Cada nen jugava una "partida" amb l'investigador. El joc consistia en tirar un dau, numerat del 0 al 5, i anotar els nombres en un paper per utilitzar-los quan convinqués. L'objectiu era aconseguir un nombre més gran que 423. Els resultats van ser els següents:

- un 15% no va ser capaç d'obtenir un nombre més gran
- un 40% ho va aconseguir anotant nombres al caseller només quan obtenien un més grans que els que ja hi havia, sense fer servir ni el zero ni l'u.
- un 35% va emprar estratègies com esperar a que sortís un 5 per posar-lo a l'esquerra i, després refusar zeros i uns
- un 10% van mostrar una bona comprensió amb estratègies diverses com utilitzar 0 i 1 quan es tenia el 5 a l'esquerra o utilitzant el 4 si a les desenes o les unitat ja s'havien superat el 2 o el 3.

Altres experiències intenten fer observacions relacionades amb el càlcul operacional<sup>16</sup>. Per exemple en proves en les que es mostrava un "comptador" de persones que havien entrat a un camp de futbol una tercera part d'alumnat de 12 anys, i la meitat del de 10, va donar respostes errònies.

Comptador "abans"				
0	6	3	9	9

Comptador "després"				

Altre indicador sobre el grau de domini i comprensió del sistema posicional ens el dona el treball amb la descomposició i recomposició de nombres. En un estudi de l'any 1963 de Fournoy, Brandt i McGregor es van obtenir aquests resultats amb alumnat de 13 anys:

<sup>16</sup> Algunes de les proves que es comentaran a continuació les hem repetit a l'IES Alella amb tot l'alumnat de 1r i 2n d'ESO per poder fer una petita comparació de resultats. Les dades recollides, com es veurà al proper capítol, no són gaire diferents de les que aquí es presenten.

Qüestió (la resposta correcta està marcada)	Respostes correctes
Què significa 25 centenes i 4 desenes? A. 25040 B. 2540 C. 2504 D. Cap de les anteriors	Menys del 25%
Quina d'aquestes frases significa 15320? A. 15320 desenes B. 15 centenes i 320 desenes C. 1532 desenes D. 1532 desenes i 20 unitats	36%
Quina xifra equival a 2 milers, 35 centenes, 18 desenes i 6 unitats? A. 3486 B. 5386 C. 5686 D. Cap de les anteriors	17%

En una altra prova posterior del mateix estil però més senzilla (7 centenes, 5 desenes i 12 unitats, fan en total? **[762]** ) un 60% dels nens i nens d'11 anys van respondre correctament, però al voltant d'un 20% van contestar 7512.

Els càlculs per estimació, a més d'altres factors com l'assimilació de pròpies experiències o l'aplicació d'estratègies com els arrodoniments, exigeixen un bon grau de domini del sistema posicional. Per tant també ens podran donar alguna pista sobre els nivells que tenen els i les alumnes. En proves fetes a Anglaterra i Gal·les amb nois i noies de 15 anys només dos de cada tres van saber argumentar perquè el resultat d'una suma ( $1056+762$ ) que havien fet amb calculadora era raonable. Una observació tangencial que es va fer era que gran part de l'alumnat tendia a arrodonir per truncament, tallant per l'esquerra, en el sentit de lectura; així 97 s'arrodonirà amb 90 en comptes de fer-ho amb 100.

Una suma que dóna molt de joc, fins i tot amb gent adulta, és anar dictant o escrivint un a un la següent llista de nombres i demanar la suma mental:

$$1000+40+1000+30+1000+20+1000+10$$

La majoria de gent respon 5000 i queda molt sorpresa quan feta a mà s'obté 4100. Els pas de 4090 més 10 es fa moltes vegades contestant 5000.

## El zero compta

El zero, com a nombre i com a xifra, apleix funcions diferents. La cardinalitat zero, en el camp dels nombres naturals, representaria l'absència d'elements d'un conjunt; en el camp dels enters, la immutabilitat d'un estat. També en aquest mateix camp (i qualsevol de les successives ampliacions del camps numèrics) és un punt de la recta, frontera entre els positius i els negatius. El zero, com a xifra, només indica l'absència d'un determinat grau d'unitats.

La funció del zero com a xifra apareix amb la primera numeració posicional, l'assíria, encara que de forma tardana i havent passat molts anys amb un simple espai separador per indicar l'absència d'unitats en algun dels graus de posició.



També el trobem a la numeració maia jugant el mateix paper. No va ser fins a la numeració hindú que el zero guanya l'estat de *nombre*. Encara avui hi ha a determinats foros d'internet discussions sobre les "qualitats" del zero: si és parell o no, si se'l pot considerar pròpiament un nombre natural... En conseqüència, tampoc ha de ser fàcil pels nens i les nenes que fan les primeres passes en el món dels nombres, copsar la doble funcionalitat del zero.

Una petita mostra dels problemes que crea el zero com a nombre, a més de qüestions conceptuals i, fins i tot, metafísiques, la trobem en el paper que juga en les operacions. Que sumar o restar zero a una quantitat no afecta a aquesta no va més enllà d'una petita qüestió operativa, però els efectes de la intervenció d'aquest nombre en els següents exemples és en moltes ocasions sorprenent, aparentment arbitrària i punt de conflicte d'aprenentatge.

Producte	Divisió	Potència	Factorial
$a \cdot 0 = 0$	$\frac{a}{0} = \infty$ (o bé no s'admet l'operació)	$a^0 = 1$	$0! = 1$

Anteriorment hem comentat l'experiència feta per E. Martí (a Alvarado 2003) sobre l'ús dels nombres en funcions de registre que feien les nenes i els nens petits. Recordarem que el grup d'estudi estava format per 60 nens i nenes de 5, 6 i 7 anys, repartits en tres grups de 20, i se'ls proporcionaven tres caixes de les quals havien d'anotar el contingut amb l'objectiu de recordar després el que contenien sense obrir la capsa; una de les capsas estava buida i, abans, no hem mencionat quins eren els resultats obtinguts respecte als tipus d'anotacions fetes sobre aquest capsa. De quina forma representen el buit, l'absència?

La meitat dels nens i nenes de 5 anys no van aconseguir saber quina era la capsa buida a partir de les seves anotacions. Dels de 6 només un no ho va aconseguir i dels de 7 tot se'n van sortir. La majoria d'estratègies seguides van ser no posar cap paper, posar el paper en blanc o escriure que la capsa estava buida. Les dues primeres, si bé no es poden considerar pròpiament formes de registre, sí que van servir de suport a la memòria. De les formes escrites només quatre nens (2 de sis anys i 2 de set) van utilitzar el 0.

L'ús adient del signe 0 (zero), una vegada més, suposa pels infants superar una sèrie d'obstacles cognitius propis de les notacions numèriques, i més específicament del signe convencional que representa l'absència. El primer obstacle és el fet de representar l'absència mitjançant una acció positiva (escriure) que deixa un resultat perceptiu (la notació). (../..) El segon obstacle (../..) és que (../..) les notacions convencionals no expliciten motivadament el que representen i el seu significat no pot ser extret directament de la forma del signe.

E.Martí (a Alvarado 2005: 73-74)

L'experiència anterior té una correspondència directa amb el llenguatge oral on faríem servir sempre expressions com "està buida", "no hi ha res"... abans que el mot *zero*.

Un altre aspecte numèric representat pel zero, a més del cardinal, és l'ordinal. Quin lloc ocuparà el zero en la sèrie dels nombres naturals? O bé optarem per posar-lo el primer (0, 1, 2, 3, 4...), o bé no l'escriurem (1, 2, 3, 4...) amb la qual cosa el zero en la sèrie numèrica apareixerà per primera vegada amb el 10 i jugarà només la seva funció posicional coma *xifra*.

A la investigació francesa comentada diverses vegades (Saada, 2003) només 5 nens/es de 1r, de 776 van començar pel zero.

01234 56789 10 11 12 13 14

Però l'ús posicional del zero no està exempt de dificultats. Dickson, Brown i Gibson (Dickson, 1991) comenten el cas d'un nen de 8 anys que treballant nombres com 100, 110 i 101 descobreix que "el zero és *res* d'alguna cosa". Els zeros posicionals creen més problemes quan estan intercalats que quan ocupen posicions finals. En un estudi de l'any 1981 només el 42% de l'alumnat anglès del 1r any de secundària va escriure correctament el nombre *quatre-cents mil setanta tres*. Aquest percentatge només pujava fins al 57% al quart any.

## Algunes propostes didàctiques

Moltes de les activitats d'anàlisi del nivell de comprensió del sistema posicional són, en el fons, també activitats d'interès didàctic. A l'any 1978, Ronshausen (recollit a Dickson, 1999) proposava una sèrie de requisits per la introducció d'aquest sistema de numeració:

1. Conèixer la cardinalitat del 0 al 9.
2. Saber comptar d'1 a 10 acústica i resultativament.
3. Reconèixer les grafies del 0 al 9.
4. Saber relacionar aquestes grafies amb conjunts d'aquestes cardinalitats.
5. Saber escriure les xifres del 0 al 9 quan s'escolta el nom o quan es veu un conjunt.

A més s'aconsella fer molta pràctica en agrupaments de desenes, ja sigui formant feixos, posant en bosses, empaquetant, amb materials estructurats... Més tard es podran representar les desenes per formes més diferenciades de la unitat com tires de cartolina, símbols o fitxes d'altres colors o àbacs on, aparentment, comença a quedar representat el valor de posició. Aquest treball d'experiències viscudes per l'alumnat sobre les qüestions relatives a l'agrupament s'estendran després a les centenes, milers... Altres teòrics propugnen que algunes d'aquestes fases finals, com l'ús d'àbacs, no ajuden especialment a la comprensió del valor de posició ja que són uns sistemes de representació tan abstractes com la pròpia numeració indoaràbiga. De fet aquesta visió es pot confirmar observant els fets històrics: a cultures amb numeracions no posicionals es feien servir, com a estris de càlcul, àbacs posicionals. Les funcions operatives i de registre quedaven separades i no es sentia la necessitat de fusionar-les; eren dos problemes diferents i cada un d'ells tenia la seva solució.

## Una altra via: regularitats ordinals de la sèrie numèrica escrita

Quan els nens i les nenes aprenen el comptatge acústic, aprenentatge que s'inicia la majoria de vegades fora del context escolar, el reconeixement de regularitats l'ajudarà a formar les regles de construcció del sistema a mesura que es va avançant en la sèrie<sup>17</sup>. Ja hem dit en el capítol sobre comptatge que el domini del comptatge acústic és independent del resultatíu. Saber comptar és així, en les primeres passes, més una qüestió més d'ordinalitat que de cardinalitat.

<sup>17</sup> És la mateixa observació de regularitats que li ajudarà a formar els conceptes bàsics sintàctics, les conjugacions verbals...

Una cosa semblant sembla passar en l'aprenentatge de l'escriptura numèrica i en el descobriment de les seves regularitats. Una de les diferències amb el sistema oral és que el procés d'ensenyament-aprenentatge de la numeració escrita és pràcticament sempre des de l'inici abordat escolarment; no té una introducció *informal*. Això no va en contra de que l'alumnat tingui unes idees inicials dels nombres escrits perquè estem envoltats per ells i alguns preconceptes segur que estan formats<sup>18</sup>. Alguns d'aquests preconceptes ja han estat esmentats anteriorment. Per exemple que sovint l'alumnat infereix correspondències inexistents entre el comptatge oral i la numeració escrita o que els nombres més grans tenen més xifres<sup>19</sup>.

En les seqüències didàctiques més habituals els nombres es presenten seguint determinades graduacions:

- els nombres a treballar s'esglaonen establint topes de grandària assignats per cursos (fins a 10, fins a 100, fins a 1000..)
- primer s'ensenyen els dígit, les xifres, després l'agrupament en desenes i, següidament, l'escriptura del 10. Es seguirà un procés similar per les centenes, milers...
- s'intenta concretar les agrupacions de desenes, centenes... amb materials
- l'explicitació del grau d'unitat (unitat, desena...) és requisit per l'ús operacio-

No hi ha correspondència, amb aquesta seqüència tan graduada, entre el coneixement del comptatge oral (ni que sigui a nivell acústic) i l'escrit, ni amb les idees que pugui tenir fetes de les seves pròpies observacions de l'entorn (bitllets, números de cases, autobusos, pàgines de llibres, dates...). Tampoc sembla haver-hi connexions amb les idees que, de *motu proprio*, es van formant sobre les regularitats de la numeració escrita. Fins i tot els aspectes operacionals relatius a la suma i resta per columnes acaben interferint en la visió global del nombre ja que unitats, desenes... es poden acabar veient com "grups independents".

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ + \quad 3 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 13 \end{array}$$

Algunes propostes didàctiques demanen tenir en compte l'observació de pautes i regularitats en el sistema numèric, treballar a partir de les discussions amb i entre l'alumnat, acceptar la possibilitat de coexistència temporal a l'aula d'escriptures i respostes "errònies" i "correctes". Per tant es planteja treballar amb situacions, jocs i problemes que poden demanar l'ús de nombres més grans i que ajudaran a l'observació d'aquestes pautes. Els problemes relacionats amb la comparació i l'ordre agafen un paper importantíssim en aquest tipus de proposta didàctica. També la producció i interpretació de nombres (base de qualsevol sistema representacional) tindran un pes específic especial.

Un exemple d'activitat relativa a ordenacions pot ser aquesta:

<sup>18</sup> Moltes de les idees que seguiran estan recollides de Lerner i Sadovsky (1994)

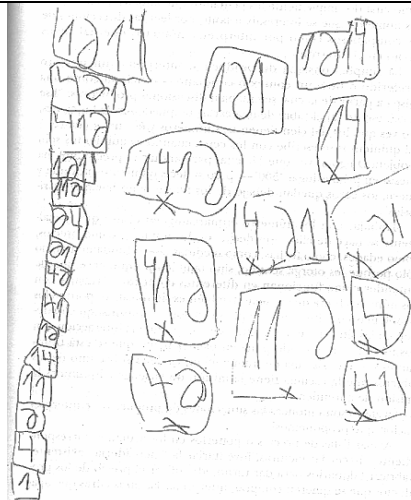
<sup>19</sup> Aquests preconceptes poden entrar en conflicte entre ells en casos com el que queda recollit també a Lerner i Sadovsky (1994) en el que un nen afirma que vuit-cents és més gran que set-cents cinquanta, plantejats oralment, però es queda sorprès i confús quan compara les seves pròpies anotacions escrites (800 i 70050)

S'explica a la classe que es faran bosses que contindran diferents quantitats de caramels (4, 26, 62, 30, 12 i 40) i es donen etiquetes amb preus diferents per adjudicar a cada bossa: 45, 10, 40, 60, 25, 85 cèntims. Es demana aparellar preus i bosses i, en grup petit, confrontar acords i discrepàncies en l'adjudicació de preus.

Les autores d'aquesta proposta expliquen amb detall al seu escrit les característiques del desenvolupament d'aquesta activitat. Un dels aspectes que destaquen és com l'argumentació davant dels altres per part dels que saben resoldre la situació-problema ajuda també a que ells/es mateixos/es formalitzin i interioritzin el que ja saben aplicar.

En les activitats d'interpretació i producció, l'ordre podrà ser una estratègia o un objectiu en si mateix. A més d'altres activitats relatives a l'entorn real també proposen d'altres estrictament numèriques i descontextualitzades com aquestes:

- Donar tres xifres i formar tots els nombres possibles de dos i tres xifres ordenant-los després. Es pot permetre o no repetir les xifres.
- Donar un nombre de dues xifres, proporcionar una tercera i demanar on es pot posar perquè el nombre format sigui el més gran possible. Anar variant la 3a xifra per discutir quan s'ha de posar a l'esquerra i quan a la dreta.



*Exemple en que les xifres s'han tret de les dates d'aniversari de dos nens del grup (11/4 i 11/6)*

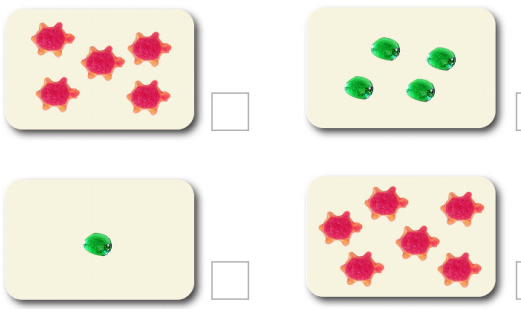
Aquestes mateixes autors i Delia Lerner en solitari (a Alvarado 2005) també han estudiat com el treball operacional (especialment en sumes i restes de nombres de dues xifres) afecta a la comprensió del funcionament del sistema operacional

Al resoldre problemes que requereixen sumar o restar nombres de dos xifres i enfrontar-se amb la necessitat construir procediments més econòmics que el comptatge un a un o el sobrecomptatge, els alumnes tenen oportunitat de descobrir els avantatges de sumar o restar reiteradament de deu en deu (descomponent, segons el cas, un dels sumands o el subtrahend). A partir de la utilització sistemàtica d'aquest procediment es fa possible realitzar comparacions entre cada estat inicial -cada un dels nombres als quals s'afegeix o es resta deu- i el resultat corresponent, la qual cosa permet establir regles referides als efectes produïts per aquestes operacions en la notació numèrica: quan es suma deu a un nombre de dos xifres canvia només la primera -que es transforma en la següent xifra en la sèrie, en tant que aquesta última queda igual ( $25 + 10 = 35$ ;  $48 + 10 = 58...$ ); quan es resta deu a un nombre de dos xifres canvia només la primera. Regles semblants es construeixen després en relació amb les sumes o restes successives de cent.

D. Lerner (a Alvarado 2005: 149)

## Les primeres passes mínimes: alguns exemples

L'opció didàctica de treballar d'una manera més global amb la sèrie numèrica escrita no priva d'un treball primer, inicialment, amb el reconeixement d'aquesta sèrie i la comprensió dels aspectes ordinals i cardinals d'un nombre: els que es relacionen amb el comptatge acústic i el resultat respectivament.

Fitxa de treball <i>ordinal</i>	Fitxa de treball <i>cardinal</i>																								
<p>1. Completa les sèries:</p> <table border="0"> <tr> <td>10</td><td></td><td>12</td><td></td><td>14</td><td></td></tr> <tr> <td>15</td><td></td><td>13</td><td></td><td>11</td><td></td></tr> <tr> <td></td><td>11</td><td></td><td>14</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td></td><td>14</td><td></td><td>12</td><td></td><td>10</td></tr> </table>	10		12		14		15		13		11			11		14				14		12		10	
10		12		14																					
15		13		11																					
	11		14																						
	14		12		10																				

Tal com varem veure en el capítol sobre comptatge el treball amb materials manipulats sempre aporta un punt de riquesa i implicació superior a la feina purament escrita. També la discussió, en els aspectes que comporta tant de reconstrucció del coneixement per comunicar-lo, com de contrastació amb el parer de l'altre, haurien de ser eixos de l'organització i disseny de les activitats.

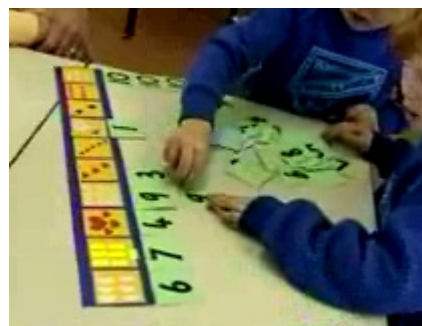
Sense fer una llista exhaustiva, alguns exemples senzills d'activitats poden ser aquests<sup>20</sup>:

- **Activitats que es centren en la identificació de numerals**

- Jocs de bingo

- **Activitats que destaquen aspectes cardinals**

- Associar grafies amb altres representacions figurades o iteratives.



<sup>20</sup> La majoria d'activitats que no són d'internet estan estretes de Carme Barba (2005) o del projecte *Count me in too* (a <http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/index.htm>)

- Associar capsetes amb elements comptables, a targetes amb diferents representacions del nombre (iterativa, escrita amb paraula, numeral gràfic)



- Construir conjunts a partir de la grafia del nombre (contemplant diferents variants d'aquestes)



Algunes activitats que poden trobar a internet intenten treballar aquests aspectes:

### Tel Spel

<http://people.zeelandnet.nl/ribert/hometelspel.html>

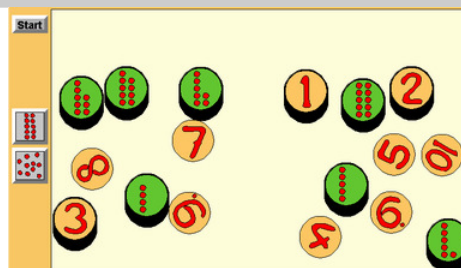
Hi podem trobar diferents activitats. Majoritàriament treballen qüestions de cardinalitat fent associar xifres i quantitats, construint-les a partir de les xifres o aparellant conjunts iguals. (Hi ha una activitat de sèrie ordenada per construir un dibuix)



### Institut Freudenthal

[http://www.fi.uu.nl/toepassingen/01013/toepassing\\_algemeen.html](http://www.fi.uu.nl/toepassingen/01013/toepassing_algemeen.html)

S'han d'associar les capses i les "tapes" numerades. Un aspecte interessant afegit és que la tapa s'ha de girar fins a col·locar el numeral gràfic en posició correcta.



### • Activitats que destaquen aspectes ordinals

#### *Treballs amb recta numèrica.*

Amb una recta numèrica mòbil (amb cordes i pines, amb velcro...) es poden proposar moltes activitats: completar, endevinar un nombre amagat, dir l'anterior i el posterior d'un nombre donat, ordenar ascendent o descendent...



#### *Treballs de construcció de taula numèrica.*

La taula va més enllà de la recta i permet observar regularitats en la col·locació dels nombres a cada desena. Es poden repartir nombres entre tot l'alumnat de l'aula i demanar que els vagin posant al lloc que els hi pertocaria de la taula.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23							

On van?

24	33	45
----	----	----

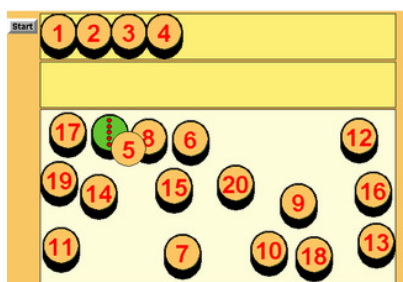
També a internet es poden veure models interactius d'algunes activitats esmentades i altres semblants.

#### **Institut Freudenthal**

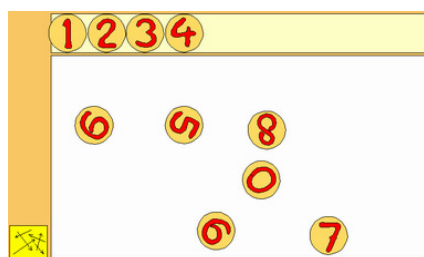
[http://www.fi.uu.nl/toepassingeng/01001/toepassing\\_algemeen.html](http://www.fi.uu.nl/toepassingeng/01001/toepassing_algemeen.html)

[http://www.fi.uu.nl/toepassingeng/01001/toepassing\\_algemeen.html](http://www.fi.uu.nl/toepassingeng/01001/toepassing_algemeen.html)

S'han d'ordenar les capsos però es pot veure la quantitat que contenen



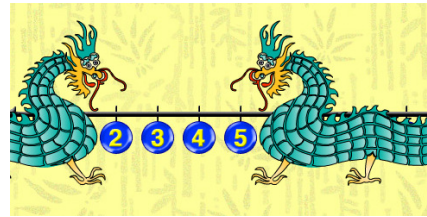
S'han d'ordenar les xifres girant-les convenientment



**EM Games**

<http://media.emgames.com/emgames/demosite/playdemo.html?activity=M1A045&activitytype=dcr>

S'ha d'acotar un nombre amagat entre dos dracs amb informacions del tipus "és més gran", "és més petit"

**Count me in too**

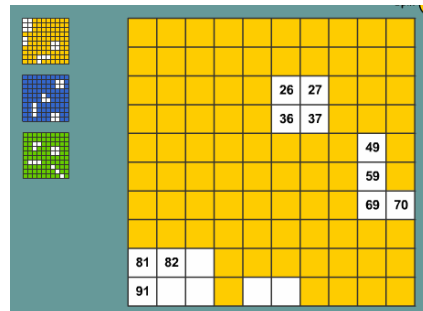
[http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children\\_ntrack.htm](http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_ntrack.htm)

Es convida a pensar el posterior i l'anterior d'un nombre



[http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/newgame\\_hundred\\_chart\\_window.htm](http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/newgame_hundred_chart_window.htm)

Es fa completar parcialment una taula numèrica de l'1 al 100. La graella va girant.

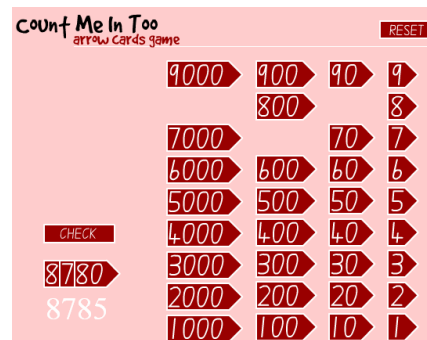


- **Altres activitats**

**Count me in too**

<http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/arrows.html>

S'ha de construir un nombre donat a partir dels milers, centenar...

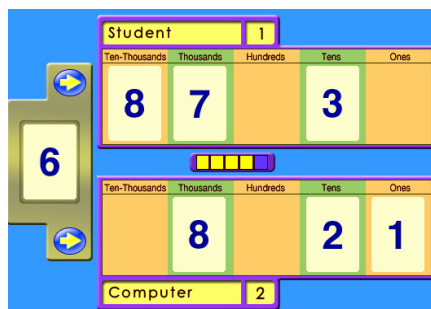




**EM Games**

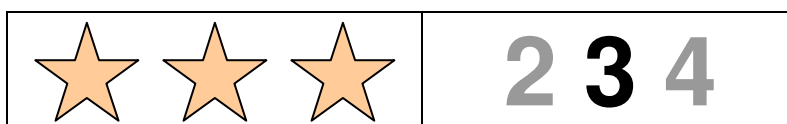
<http://media.emgames.com/emgames/demosite/playdemo.html?activity=M2A050&activitytype=dcr>

Es competeix amb l'ordinador per construir el nombre més gran que es pot formar amb unes cartes que van sortint aleatòriament.

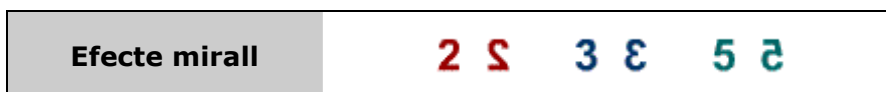
**Resum**

L'escriptura numèrica és, inicialment, una forma de representació externa estable de l'ordre i la quantitat. Per tant, en quant un nombre queda representat per un grup de signes, aquesta representació queda afectada pels aspectes semiòtics de qualsevol altre tipus de llenguatge escrit. El model representat pel nostre sistema posicional de numeració és **arbitrari** (la seva aparença formal, de caràcter compilador, no representa quantitats figurativament), **convencional**, (ha estat acordat descartant altres models d'escriptura numèrica), i **sistèmic**, (el seu ús ve determinat per un conjunt força estricte de regles). Aquestes característiques fan que el sistema escrit de numeració hagi de ser objecte, en els seus trets bàsics, de transmissió: el seu aprenentatge està profundament marcat per aspectes no reconstruïbles.

Els primers aprenentatges de l'escriptura numèrica s'orienten cap al reconeixement i ús de les xifres (de l'1 al 9 més el 0). Aquestes xifres s'aprenen com a formes de representació de la cardinalitat de conjunts i com a sèrie gràfica, establint una equivalència entre el comptatge resultatiu i acústic. Aquesta equivalència va més enllà de la simple comparació ja que el signe 3 pot ser el signe que està entre 2 i 4, en determinades activitats, o la representació d'una quantitat, en altres. Poc a poc aquestes visions cardinal i ordinal aniran confluint.



En els primers aprenentatges de les xifres, i per tant dels primers nombres, trobem problemes de dos tipus. Uns de menors relatius a la grafia, i altres amb un caràcter més conceptual, com per exemple la manca de visió del nombre escrit com una forma de registre de quantitats.



Aquesta resistència a l'ús funcional del nombre com a registre queda confirmat per repetides experiències fetes amb nens i nenes petites en la que se'ls posa en situació d'anotar el contingut d'unes caixes i s'opta majoritàriament per anotar aspectes qualitatius (què?) en comptes de quantitatius (quants?); quan es considera també la quantitat, sovint s'adopten formes de representació més figurades i iteratives que convencionals, encara que es coneguin. Hi ha característiques situacionals que ajuden a utilitzar la numeració convencional:

- Que el destinatari del registre sigui una altra persona
- Que la quantitat a representar sigui relativament gran
- Que la situació demani de forma clara un cert grau d'exactitud en el registre
- Que la funció del nombre en el context de la situació sigui més quantitativa que identificativa.

El pas següent, el canvi a la desena, centena... comporta l'aparició de nous problemes. També alguns es refereixen a la grafia, com la inversió de nombres, escrivint 32 per 23. Altres estan més relacionats amb els aspectes estructurals de la numeració, com el de l'agrupament. Aquest és un dels principis bàsics de qualsevol sistema de construcció de numerals orals o escrits. En el cas de les numeracions escrites l'agrupament, més regular que en les orals, es constitueix en *base* del sistema de numeració. En els sistemes additius el model d'agrupació és més visible i evident, i les regles de construcció dels nombres més clares; en molts casos s'acosten més al tipus de notacions iteratives que acostumen a fer els nens i nenes de forma natural. Existeixen propostes didàctiques que fan especial èmfasi en realitzar diferents experiències d'agrupament com a pas previ per la comprensió del concepte posició relativa. S'ha observat, per altra banda, que l'alumnat no és gaire conscient ni del problema de l'agrupament ni del principi de posició.

S'han realitzat moltes experiències sobre les dificultats que presenta l'aprenentatge del sistema posicional. Les principals es troben, fins i tot a l'educació secundària, en la lecto-escriptura de nombres grans, sobre tot quan hi ha zeros en posicions intermèdies. No sembla haver-hi tants en les qüestions relatives a l'ordenació. Altres problemes estan lligats als canvis de grau d'unitat, com el pas de 199 a 200 o a la inversa. També trobem que la descomposició en desenes, centenes... quan es fa de forma agrupada presenta dificultats de comprensió. Per exemple, costa identificar 3570 com 35 centenes i 7 desenes.

Hi ha propostes que s'estimen més no substituir, en el procés didàctic, un sistema de numeració més estricte i hermètic (el posicional) per altres que ho són menys (com els additius, l'ús d'àbacs, l'empaquetament en bosses...) ja que el primer és el que s'ha d'aprendre. Aquestes propostes assumeixen el caràcter "no-transparent" de l'agrupament a la nostra numeració i tracten de treballar a partir del coneixement i els preconceptes del sistema gràfic que l'alumnat ja té, basant l'aprenentatge en l'observació de les regularitats en situacions d'ordenació i de càlcul. Entre aquests preconceptes hi ha la idea de que "un nombre que té més xifres és més gran" o que "la xifra de l'esquerra és la que mana". També hi ha, per part dels nens i nenes, la idea de que el comptatge oral, del que tenen millor domini i en el qual saben arribar a nombres més grans, té una correspondència exacta amb l'escrit. L'aprenentatge s'estructuraria al voltant de la discussió provocada per les diferents resolucions de les situacions plantejades a l'alumnat, la recerca de pautes, de contradiccions...

Exemple de conflicte entre numeració oral i escrita		Possible discussió
Vint-i-set	207	Si 35 és més gran que "vint-i-set" perquè té menys xifres?